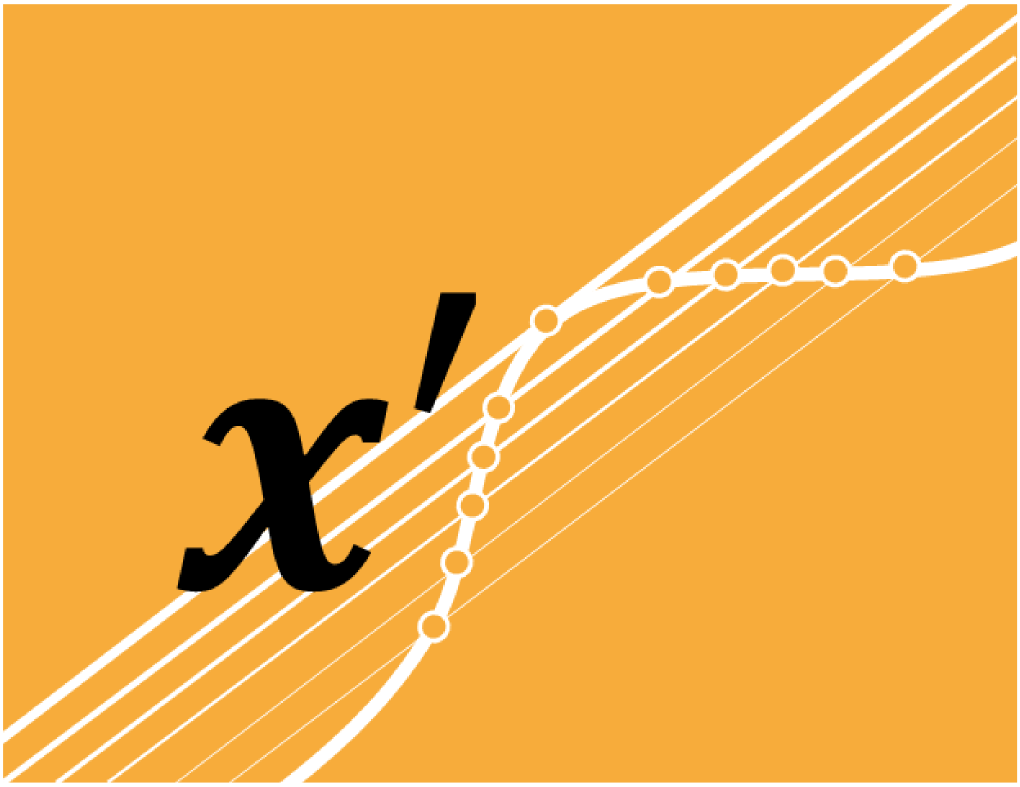
- RESUMÃO -
DERIVADAS

(Cálculo)

Formulário, Dicas e Macetes para a Prova



Responde Aí

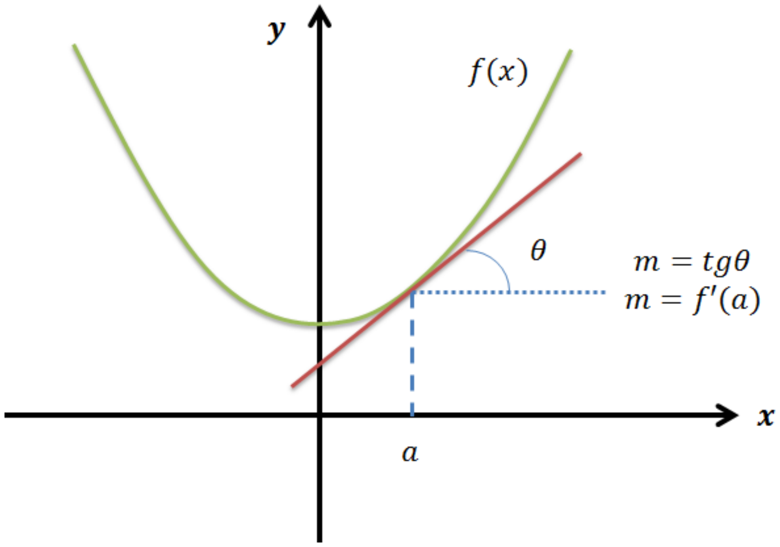
www.respondeai.com.br

Definição

Derivada de uma função f em relação à variável x: é a taxa de variação de f à medida que x varia. A derivada no ponto $x = x_0$ é

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Graficamente, a derivada em um ponto é o **coeficiente angular da reta tangente** ao gráfico no mesmo ponto.



Regras Tabeladas para Derivar

Meu camarada, regras são regras... Então aqui vão elas! E separadas por tipo de função, só pra você!

Polinomial	$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(C)' = 0, C$ constante
Exponencial	$(a^x)' = (\ln(a))a^x$	$(e^x)' = e^x$
Logarítmica	$(\log_a(x))' = \dfrac{1}{x(\ln(a))}$	$(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$

Trigonométrica	$(\text{sen}(x))' = \cos(x)$	$(\cos(x))' = -\text{sen}(x)$
	$(\text{tg}(x))' = \sec^2(x)$	$(\sec(x))' = \sec(x)\,\text{tg}(x)$
	$(\text{cotg}(x))' = -\text{cossec}^2(x)$	$(\text{cossec}(x))' = -\text{cotg}(x)\,\text{cossec}(x)$
Arcos Trigonométricos	$(\text{arcsen}\, x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	$(\text{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(\text{arccotg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$
	$(\text{arcsec}\, x)' = \dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$(\text{arccossec}\, x)' = -\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Calma que não acabou...

Derivada da soma / subtração	$\big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x)$
Derivada do produto: **Regra do Produto**	$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Derivada do quociente: **Regra do Quociente**	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
Derivada da função composta: **Regra da Cadeia**	$f\big(g(x)\big)' = f'\big(g(x)\big).g'(x)$
Derivada da função inversa	$\big(f^{-1}(y)\big)' = \dfrac{1}{f'(x)}$

Hora do Bizu:

Se vamos calcular uma derivada de f no ponto $x = a$, mas essa função é definida de forma diferente no ponto $x = a$, então usamos a definição de derivada

Por exemplo, se queremos a derivada de $f(x)$ no ponto a

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \neq a \\ 5 & x = a \end{cases}$$

Aí nós usamos a definição.

Agora um pedido de amigo: não se esqueça das **derivadas implícitas**.

Exemplo: ao derivar $y^2 = x^3 + 2$ em relação a x, com $y = f(x)$, usamos a Regra da Cadeia, multiplicando a derivada de y^2 por y': $2y(y') = 3x^2$. Ficando nesse caso

$$2yy' = 3x^2$$

Reta Tangente

- Reta tangente à determinada curva: $y = ax + b$.
- A reta passa no próprio ponto da curva $f(x)$ em x_0, ou seja, $(x_0, f(x_0))$.
- Coeficiente angular: $a = f'(x_0)$.
- Só falta achar b: $b = y - a.x = f(x_0) - f'(x_0).x_0$.

Taxas Relacionadas e Otimização

Cuidado para não confundir! Ambas começam com uma modelagem do problema, relacionando as variáveis que te interessam.
Para criar as relações, geralmente você terá que usar alguma coisa de Geometria ;)
O que costuma aparecer: Pitágoras, Lei dos Cossenos, Lei dos Senos, área e volume de formas geométricas, perímetros, etc.

Taxas Relacionadas:

1. Teremos que encontrar uma relação entre as variáveis do problema. Geralmente, para encontrar, teremos que usar fórmulas da Geometria.
2. Derivamos as duas em relação a uma **terceira variável**, que quase sempre é o **tempo**, usando derivação implícita.
3. Pela Regra da Cadeia, aparece um termo que é a taxa de variação da variável em relação ao tempo no instante analisado.
4. O enunciado terá nos dado os valores das variáveis ou das taxas dessas variáveis em relação à variável que derivamos. Vai sobrar uma incógnita.
5. Substituímos os valores das variáveis no instante observado e uma das taxas de variação para descobrir a outra, aquela pedida no enunciado.

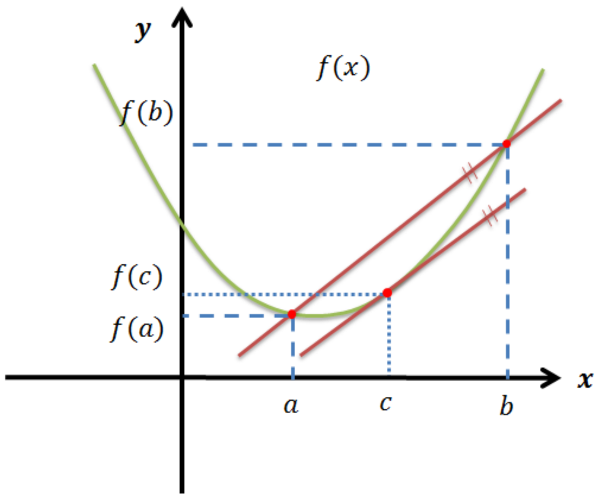
Otimização:

- Temos uma relação entre duas variáveis, derivando aquela que se quer o **valor ótimo** (máximo ou mínimo) em relação **à outra**.
- Igualamos a derivada a 0 e descobrimos o valor da variável que gera o valor ótimo da outra.
- Observa-se o sinal da derivada antes e depois do ponto crítico para identificar se é um máximo ou um mínimo:
    - se é positiva antes e negativa depois, é de máximo;
    - se for ao contrário, é mínimo.
- Cuidado! Você tem que verificar se você achou o ponto de máximo/mínimo local ou global. Para isso, teste o valor da função nos extremos dos intervalos analisados.

Teorema do Valor Médio

Existe um número c em $[a, b]$ tal que a derivada de f em $x = c$ tem a mesma inclinação da reta que liga os pontos onde $x = a$ e $x = b$:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Isso é válido se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b).

- Se na sua prova, pedirem pra achar o c: você pega a $f(x)$, deriva e calcula aquela expressão lá $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Daí, só igualar a $f'(x)$ e resolver pra x. Este é o c!
- Podem te pedir o $f'(c)$: não precisa nem calcular o c, olha só pra fórmula. Basta conhecer a e b.

Regra de L'Hospital

Quando a função chega numa indeterminação de quociente, como $\pm\frac{\infty}{\infty}$ e $\frac{0}{0}$, derivamos numerador e denominador:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Se continuar dando indeterminação, derive de novo.
Cuidado! Se tiver dando indeterminação infinitamente, desconfie! Provavelmente você terá que achar o limite usando algebrismos.
Você também pode usar isso se $x \to \pm\infty$.

Cara, se liga que vou te dar um exemplo de LIMITES onde você vai precisar disso!
O problema é calcular esse limite: $\lim_{x\to 0} x^x$.

Pera, isso dá 0^0? Indeterminação, né?!

Fazemos assim: $\mathrm{L} = \lim_{x\to 0} x^x$. Aplicando ln dos dois lados dá... $\ln L = \lim_{x\to 0}(x.\ln x)$.
Só que ali aparece uma indeterminação $0.(-\infty)$, já que $\ln 0 = -\infty$.
Então saca só: $\ln L = \lim_{x\to 0}(x.\ln x) \to \ln L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right)$.
Agora sim, dentro do parênteses a indeterminação é do tipo $-\infty/\infty$, já que $1/0 = \infty$.
Aplicando L'Hospital... derivamos $\ln x$: $(\ln x)' = 1/x$; derivamos $1/x$: $(1/x)' = -1/x^2$.
Logo: $\ln L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{1/x}\right) \to \ln L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1/x}{-1/x^2}\right) \to \ln L = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$.
Como $\ln L = 0$, então, finalmente, $L = e^0 = 1$.

Esboço de Curvas

(1) **Domínio**
Descobrir onde a função está definida e onde é descontínua.

- Se a função for polinomial, ela é contínua.
- Se a função for racional, é só ver onde o denominador se anula: ali ela é descontínua.
- Seno é contínuo, cosseno é contínuo, mas tangente não é (em $\frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{R}$)!
- Olhe atentamente para logaritmos, raízes quadradas e outras funções que possam gerar descontinuidade.

(2) **Assíntotas**
Assíntotas horizontais: limite da função em $\pm\infty$.

Assíntotas verticais: limite da função nas **descontinuidades** do domínio. Tem assíntota vertical se o limite explode para $\pm\infty$.

Para as assíntotas oblíquas, você só se preocupa com ela se não tiver assíntota horizontal. A definição para achá-las é, sendo uma reta $y = mx + n$,

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad ; \quad n = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx$$

(3) Crescimento

Analisar o fator do crescimento, observando o sinal da derivada primeira:

- derivada positiva: gráfico crescente;
- derivada negativa: gráfico decrescente.

Chamamos o ponto onde temos a derivada igual a 0 de **ponto crítico**, podendo ser:

- máximo (derivada positiva antes e negativa depois);
- mínimo (derivada negativa antes e positiva depois)
- Ou nenhum dos dois (derivada mantes o sinal antes e depois ou o ponto não está no domínio).

(4) Concavidade

Observar o sinal da derivada segunda:

- positiva: concavidade para cima;
- negativa: concavidade para baixo;
- nula: **ponto crítico para inflexão:**
    - se o sinal da segunda derivada trocar no ponto crítico, esse ponto é **ponto de inflexão**.

(5) Reorganização

Juntar todas as informações que você achou e reescrevê-las resumidamente.
Traçar o ponto cartesiano e marcar, se existirem, os pontos de inflexão, pontos de extremo, interseções com o eixo x e y e quaisquer outros pontos relevantes.

(6) Esboço

Traçar as assíntotas e compor o desenho do gráfico de acordo com as informações da derivada primeira e da derivada segunda.

Polinômio de Taylor

Para achar o polinômio de Taylor da função $f(x)$ de grau c em torno do ponto $x = a$:

Passo 1: Achar as derivadas até a derivada c.

$$f'(x), f''(x), \dots, f^c(x)$$

Passo 2: Achar os valores da função e das derivadas até a derivada c no ponto $x = a$:

$$f'(a), f''(a), \dots, f^c(a)$$

Passo 3: Achar cada termo do polinômio, com n indo de 0 a c:

$$\frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

Passo 4: Somar todos os termos:

$$p_c(x) = \sum_{n=0}^{c} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!}$$

$$p_c(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^c(a)(x-a)^c}{c!}$$

Para estimar erros:

$$E(x) \leq \frac{f^{c+1}(a)(x-a)^{c+1}}{(c+1)!}$$